4.3.12 Vzorce pro poloviční úhel

Předpoklady: 040310

Chceme získat vzorce pro poloviční úhel $\Rightarrow$ vyjdeme ze vzorců pro dvojnásobný úhel:

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Výhodnější je vzorec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, obsahuje obě funkce $\sin x$ a $\cos x$ ve druhé mocnině (tedy snadno převoditelné jednu na druhou).

Změníme proměnnou: $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$ a pomocí substituce $y = \frac{x}{2}$ získáme poloviční hodnotu: $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Chceme vzorec pro $\sin \frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ nahradíme $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos 2x$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{x}{2}} = \left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$ (první vzorec pro poloviční úhel)

Vada na kráse: Nezjistíme přímo hodnotu sinu, ale pouze absolutní hodnotu $\Rightarrow$ znaménko musíme zjistit někde jinde.

Př. 1: Odvoď analogicky vzorec pro $\left|\cos \frac{x}{2}\right|$.

Začneme u rovnice: $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Chceme vzorec pro $\cos \frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ nahradíme $\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2} \Rightarrow \sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}=\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$ (opět jsme nezískali znaménko)

Pedagogická poznámka: Část studentů si špatně vyloží podstatu postupu a začne vzorec pro $\cos\frac{x}{2}$ odvozovat ze vzorce $\sin 2x = 2\sin\cos x$.

Př. 2: Odvoď vzorec pro $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

Stačí si uvědomit, že vždy platí $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, pak platí i $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$.

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}=\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

Vzorce pro poloviční úhel:

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

Př. 3: Urči přesnou hodnotu $\sin\frac{\pi}{8}$.

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\sin\frac{\pi}{8}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$\frac{\pi}{8}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, kde platí $\sin x>0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Pedagogická poznámka: Docela často se objevuje extenze vzorce na libovolnou část úhlu ve tvaru $\left|\sin\frac{\pi}{8}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\pi}{8}}$ (jakoby platil vzorec $\left|\sin\frac{x}{n}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{n}}$, který neplatí, protože neplatí vzorec $\cos nx=\frac{n}{2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$). Řešení komplikuje zlomek v zadání, proto doporučím žákům, kteří si neví rady, aby nejdříve zkusili vyřešit příklad 2, který je přehlednější (příklad se zlomkem je však na začátek zařazen schválně, aby to lepší žáci měli obtížnější a jako poučení, že je možné si představit řešení jednoduššího příkladu, když si nevíme rady se složitějším).

Př. 4: Urči přesnou hodnotu $\cos 15°$.

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\cos 15°\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$15° \in (0;90°)$, kde platí $\cos x > 0$ $\Rightarrow \cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Pomocí vzorců pro hodnoty polovičního úhlu můžeme zahušťovat tabulku hodnot.

Př. 5: Urči přesnou hodnotu $\cos 195°$.

Musíme zjistit, z jakého úhlu budeme počítat: $195 \cdot 2 = 390 = 360 + 30$ $\Rightarrow$ $\cos 390° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\cos 15°\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 390°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$195° \in (180°;270°)$, kde platí $\cos x < 0$ $\Rightarrow \cos 195° = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Pedagogická poznámka: Největší problémy budou s pochopením, že $360 + 30$ $\Rightarrow$ $\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Objevují se zápisy jako $\cos 390° = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi$, které svědčí o nerozlišování úhlu a hodnot goniometrické funkce (poměru stran).

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu je dobré synchronizovat třídu a další příklad začínat společně. Většina žáků dosazuje vzorce pro poloviční úhel, velmi rychle je zastavím, pouze pokud je někdo opravdu hodně vepředu využijeme častý výsledný tvar takového upravování $\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x}$ jako ukázku téměř stejného výsledku $\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \left|\sin x\right|$.

Př. 6: Urči definiční obor a uprav výraz $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}$.

- $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, musí platí $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$,
- jmenovatel zlomku je vždy kladný (součet jedničky a druhé mocniny),

$\Rightarrow$ $x \in R - \bigcup_{k \in Z} \{\pi + k \cdot 2\pi\}$.

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\sin x$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}-\sin x=0$.

Problém: Rozdílné argumenty u obou sinů.

Pokus: Použijeme vzorec pro poloviční úhel $\Rightarrow$ $\sqrt{3}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}-\sin x=0$ $\Rightarrow$ žádné velké zlepšení: odmocnina v rovnici, obě goniometrické funkce bez druhých mocnin (špatně převoditelné navzájem) a hlavně v rovnici bylo $\sin\frac{x}{2}$, místo kterého jsme dosadili $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

Lepší řešení: substituce $\frac{x}{2}=y$. Použijeme pak vzorce pro dvojnásobný úhel, které neobsahují odmocniny.

$\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}-\sin x=0$

Substituce: $y=\frac{x}{2}$.

$\sqrt{3}\sin y-\sin 2y=0$

$\sqrt{3}\sin y-2\sin y\cos y=0$

$\sin y\left(\sqrt{3}-2\cos y\right)=0$

Součinový tvar:

$\sin y=0$

$y_1=0+k\cdot\pi$

$\left(\sqrt{3}-2\cos y\right)=0$

$\sqrt{3}=2\cos y$

$\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ $\quad$ $y_3=\frac{11}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=\frac{x_1}{2}=0+k\cdot\pi$

$\frac{x_1}{2}=0+k\cdot\pi \quad /\cdot 2$

$x_1=0+k\cdot 2\pi$

$y_2=\frac{x_2}{2}=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$\frac{x_2}{2}=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad /\cdot 2$

$y_3=\frac{x_3}{2}=\frac{11}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$\frac{x_3}{2}=\frac{11}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad /\cdot 2$

$$x_2 = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \qquad x_3 = \frac{11}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{k \cdot 2\pi; \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi; \frac{11}{3}\pi + k \cdot 4\pi\right\}$$

Vzorce pro poloviční úhel se nepoužívají k řešení rovnic a nerovnic, protože do nich zanáší odmocniny a nutnost umocňování (a dělání zkoušek). Místo nich se používá substituce na dvojnásobný úhel, který se odstraní vzorci pro dvojnásobný úhel. Podobným způsobem je možné poloviční úhel obejít i při úpravách výrazů a dokazování rovností.

Př. 8: Urči definiční obor rovnosti $\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\sin 2x$ a pak dokaž její platnost:

a) použitím vzorců pro poloviční úhel,

b) substitucí $y = \frac{x}{2}$ a použitím vzorců pro dvojnásobný úhel.

Který z obou postupů je korektnější?

- $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, musí platí $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$
- $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$, musí platí $\frac{x}{2} \neq k \cdot \pi \Rightarrow x \neq k \cdot 2\pi$
- jmenovatel zlomku je nenulový $\Rightarrow$ $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq \pm 1$

  $\Rightarrow$ $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ (všechny tři skupiny zapsány pohromadě).

a) $$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 x}{\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} - \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}} = \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1}{4} 2\sin x\cos x$$

$$\frac{\cos^2 x}{\dfrac{\left(\sqrt{1+\cos x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\cos x}\right)^2}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}} = \frac{1}{2}\sin x\cos x \qquad /:\cos x$$

$$\frac{\cos x}{\dfrac{1+\cos x - (1-\cos x)}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}}} = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\frac{\cos x}{\dfrac{2\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}} = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin x} = \frac{1}{2}\sin x$$
$$\sin x = \sin x$$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{4}\sin 2x \;\Rightarrow\; \dfrac{\cos^2 2y}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{tg} y} = \dfrac{1}{4}\sin 4y$

$$\frac{\cos^2 2y}{\frac{\cos y}{\sin y} - \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{1}{4} 2\sin 2y \cos 2y \qquad / : \cos 2y$$
$$\frac{\cos 2y}{\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin y \cos y}} = \frac{1}{2}\sin 2y$$
$$\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin y \cos y}} = \frac{1}{2} 2\sin y \cos y$$
$$\sin y \cos y = \sin y \cos y$$

Druhý postup je korektnější, nemusíme řešit problémy se znamínky a odmocninami ve vzorcích (při úpravách v bodě a) jsme je taktně zamlčeli).

Př. 9: Urči přesnou hodnotu $\sin\frac{\pi}{16}$. Ověř na kalkulačce, zda hodnota získaného výrazu odpovídá hodnotě vypočtené kalkulačkou jako $\sin\frac{\pi}{16}$.

Platí: $\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$, $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ $\Rightarrow$ musíme určit $\cos\frac{\pi}{8}$.

$\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{16} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, kde platí $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ $\Rightarrow$ všechny získané hodnoty jsou kladné.

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\cos\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow \left|\sin\frac{\pi}{16}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Kalkulačka: $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} = 0{,}195090322$, $\sin\dfrac{\pi}{16} = 0{,}195090322$.

Pro zajímavost: $\frac{\pi}{16} = 0{,}19634954 \Rightarrow$ pro malá čísla se hodnoty funkce $y = \sin x$ blíží hodnotám funkce $y = x$.

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je zadání výrazu do kalkulačky a přepínání mezi stupni a radiány.

Př. 10: Petáková:
strana 48, cvičení 66 a)
strana 48, cvičení 69 c)
strana 48, cvičení 70 a)
strana 54, cvičení 20 b), e)

Shrnutí: Vzorce pro poloviční úhly obsahují odmocniny a proto se substitucí vyhýbáme jejich používání ve všech situacích mimo dopočítávání hodnot pro konkrétní úhel.